**HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

1. ***MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG***

*Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.*

* + *Định lí Pi-ta-go: BC*2  *AB*2  *AC*2
  + *AB*2  *BC*.*BH ; AC*2  *BC*.*CH*
  + *AB*.*AC*  *BC*.*AH*
* *AH*2  *BH*.*CH*
* 1  1  1

*AH* 2 *AB*2 *AC*2

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH, CH, AC và AH.

*HD: BH*  1,8*cm , CH*  3,2*cm, AC*  4*cm* , *AH*  2,4*cm* .

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10cm, AB = 8cm. AH là đường cao. Tính BC, BH, CH, AH.

*HD:BC=2 ; BH=32/41 ; CH=50/41; AH=40/41.*

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 12cm. Tính chiều dài hai cạnh

góc vuông biết *AB*  2 *AC* .

*HD: AB*  24 13 (*cm*) *, AC*  36 13 (*cm*) *.*



3

13 13

**Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết BH=10cm, CH=42 cm. Tính BC, AH, AB và AC.

*HD: BC*  52*cm , AH*  2 105*cm , AB*  2 130 *cm , AC*  2 546 *cm .*

**Bài 5.** Hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là 600 a) Tính cạnh BC. b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

*HD:*

*a, Gọi P và Q là chân đường cao kẻ từ D và C xuống AB: AP=QB mà PQ=DC=10cm nên AP=QB=(30-10):2=10cm.*

*b, NM=DP=AP.=10 cm.*

**Bài 6.** Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 600 và góc A là 900 a) Tính đường chéo BD. b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC. c)Tính HK. d) Vẽ BE  DC kéo dài. Tính BE, CE và DC.

*HD:*

*a, BD2=AB2+AD2 => BD=10cm.*

*b, ABC đều (AB=AC mà ) nên BH=5cm,*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *ADK có* |  | *nên KD=1/2AD=5cm,* |
| *c, ABH có*  *AK=5* | *cm* | *nên AH=1/2AB=5cm, mà AK2=AD2-DK2=75 nên* |

*suy ra HK=5-5 cm.*

*d, ADC cân có * *nên *

*=>*

*nên BEC vuông cân tại E nên BE=EC mà BE2+EC2=BC2 => BE=EC=5 cm.*

*Trong KDC có KD=5cm, KC=AC-AK=10-5* *cm Dùng pytago tính DC.*

O*x*, lấy điểm D sao cho *OD*  *a* . Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD.a)

2

Tính AD, AC và BC theo *a.*b) Kéo dài DO một đoạn OE = *a*. Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 7.** Cho đoạn thẳng AB=2*a*. Từ trung điểm O của AB vẽ tia O*x* AB. Trên

*HD:*

*a, AD=ADO ABC nên AD.AC=AB.AO => AC=Dùng pytago cho*

*tam giác ABC để tính BC= * *. b, Chỉ ra OA=OB=OC=OE.*

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho góc AMC= góc ANB=900.

Chứng minh: AM = AN.

*HD: ABD ACE  AM*2  *AC*.*AD*  *AB*.*AE*  *AN*2 *.*

420. Tính chu vi tam giác ABC.

*AC* 21

**Bài 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết *AB*  20 và AH =

*HD:Đặt AB*  20*k*, *AC*  21*k*  *BC*  29*k . Từ AH.BC = AB.AC  k*  29 *.HD:*

*PABC*  2030 *.*



**Bài 10.** Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết *AB*  2 13,*OA*  6 , tính diện tích hình thang ABCD.

*Tính được: OB =* 4*, OD =* 9*, OC =* 13,5*.HD: S*  126,75 *.*

## TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. **Định nghĩa:** *Cho tam giác vuông có góc nhọn .*

sin*a* 

## Chú ý:

*caïnh ñoái ;*

*caïnh huyeàn*

cos*a* 

*caïnh keà caïnh huyeàn*

*;* tan*a*  *caïnh ñoái ;*

*caïnh keà*

cot*a* 

*caïnh keà caïnh ñoái*

* + *Cho góc nhọn . Ta có:* 0  sin**  1; 0  cos**  1*.*
  + *Cho 2 góc nhọn , . Nếu* sin*a*

 sin *b*

*(hoặc* cos**  cos * , hoặc*

tan*a*

 tan *b , hoặc* cot*a*

 cot *b ) thì a*

 *b .*

# Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau:

*Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.*

*Sin (900-a) = cosa tan(900-a)=cotana cos(900-a)=sina cotan(900-a)=tana*

*Ví dụ: sin 250=cos650; tan200=cotan700…..*

# Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   Tỉ số LG | 300 | 450 | 600 |
| sin*a* | 1  2 | 2 2 | 3 2 |
| cos** | 3 2 | 2 2 | 1  2 |
| tan*a* | 3 3 | 1 | 3 |
| cot*a* | 3 | 1 | 3 3 |

1. **Một số hệ thức lượng giác**

tan**  sin* ;*

cos**

cot **  cos* ;* tan*a* .cot*a*

sin**

 1*;*

sin2 **  cos2 **  1*;*

1 tan2 ** 1 *;*

cos2 **

1 cot2 *a*

 1 sin2 *a*



# Công thức tính diện tích tam giác:

=P.r=

R: Bán kính đường tròn ngoại tiếp, r: Bán kính đường tròn nội tiếp.

( Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

Trong tam giác bất kì:



Với a là cạnh đối diện góc A, b là cạnh đối diện góc B,

c là cạnh đối diện góc C.

# BÀI TẬP:

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH=64cm và CH=81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

*HD: AB2=BH.BC nên AB=96,3cm; AC2=HC.BC nên AC=108,4cm*

*CosC= nên .*

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:a) BC =5cm, AB=3cm. b) BC=13 cm, AC=12 cm. c) AC= 4cm, AB=3cm.

*HD:*

1. sin *B*  0,8 *;*

cos *B*  0,6

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = 15cm.a) Tính góc

B. b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.c) Vẽ AH  BI tại H. Tính AH.

*HD:*

*a, tanB=* *nên .*

*b, tan* *nên AI=AB. tan =10.tan280 =5,3cm*

*c, sin nên AH=AB.sin* *= 10.sin280 =4,7cm.*

**Bài 4.** Tính giá trị các biểu thức sau:a)

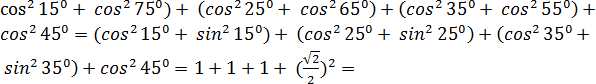
cos2150  cos2 250  cos2 350  cos2 450  cos2 550  cos2 650  cos2 750 .b)

sin2100 sin2 200  sin2 300 sin2 400 sin2 500 sin2 700  sin2 800 .c)

sin150  sin 750  cos150  cos750  sin300 d) sin350  sin 670  cos230  cos550 e)

cos2 200  cos2 400  cos2 500  cos2 700 f) sin 200  tan 400  cot 500  cos 700

*HD: Dùng công thức: sin(900-a)=cosa; tan(900-a)=cota.*

*a)(*

3,5

1.  3

4

*c)* 0,5 *d)* 0 *e)* 2 *f)* 0.

d)

c) tan*a*  3

b) cos**  0,6

lại của : a) sin*a*  0,8

cot*a*  2

**Bài 5.** Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn , tính các tỉ số lượng giác còn

*HD: Dùng các công thức trong mục 4 ( một số hệ thức lượng ) để tính. Chú ý*

*góc  nhọn thì sin>0; cos>0.*

1. cos**  0,6
2. sin*a*

 0,8

A=(sin-3cos)/(3sin+7cos)

5

**Bài 6.** a. Cho góc nhọn . Biết cos**  sin**  1 . Tính cot*a* .b. Cho tan=2. Tính

*HD:*

*a, cos- sin=* *(1) nên (cos -sin )2=* *hay cos2 + sin2 -2cos.sin = * *hay sin.cos =*

*Ta có: (cos + sin )2=cos2 + sin2 + 2cos.sin= * *nên cos+sin= * *(2)Từ (1)(2) tính được cos* *và sin, từ đó tính cot. (HD:*

cot*a =* 4 )

3

*b, Chia cả tử số và mẫu số cho cos* *ta được: A= .*

13

**Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết cos *A*  5 . Tính tan *B* .

*HD:*

tan *B*  5 .

12

b) 1 sin2 **  cos2 **

e) tan2 ** sin2 *a* tan2 **

**Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau:a) (1 cos**)(1 cos**)

c) sin** sin** cos2 ** d) sin4 **  cos4 **  2sin2 ** cos2 **

f) cos2 **  tan2 ** cos2 **

*HD:*

* 1. sin2 *a b)* 2 *c)* sin3 *a d)* 1 *e)* sin2 *a f)* 1.

sin**.cos**

(sin**  cos** )2  (sin**  cos** )2  4

b)

1 sin** cos**

**Bài 9.** Chứng minh các hệ thức sau:a) cos**  1 sin**

*HD:*

*a, Biến đổi tương đương hai vế*

*b, Biến đổi vế trái.*



một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

( Diện tích tam giác bằng

đẳng thức sin *A*  sin *B*  sin*C* không?c) Chứng

minh:

.b) Có thể xảy ra

*c*



*b*



sin *A* sin *B* sin*C*

*a*

với các đỉnh A, B, C.a) Chứng minh:

**Bài 10.** Cho tam giác nhọn ABC. Gọi *a, b, c* lần lượt là độ dài các cạnh đối diện

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *HD: a) Vẽ đường cao AH. Xét* | *AHB và AHC có:* |  |
| *nên*  *Tương tự ta cũng chứng minh :* | *hay* | *.* |



* 1. *không. Vì . (tính chất dãy tỉ số bằng nhau) Nếu thì a=b+c: Vô lí.*

*c) * *mà *

*Suy ra:*

*. Các công thức khác chứng minh tương*

*tự.*

## MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC

***VUÔNG***

*Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, AB = c.*

*b*  *a*.sin *B*  *a*.cos*C ; c*  *a*.sin*C*  *a*.cos *B b*  *c*.tan *B*  *c*.cot *C; c*  *b*.tan*C*  *b*.cot *B*

# BÀI TẬP:

**Bài 1.** Giải tam giác vuông ABC, biết góc A=900 và:a) *a*  15*cm*;*b*  10*cm*

b) *b*  12*cm*; *c*  7*cm*

*HD: a)B=420, C=480, c=11,18cm b) B=600, C=300, a=14cm.*

**Bài 2.** Cho tam giác ABC có góc B=600, C=500, AC=35cm. Tính diện tích tam giác ABC.

*HD: S*  509*cm*2 *. Vẽ đường cao AH. Tính AH, HB, HC.*

**Bài 3.** Cho tứ giác ABCD có gócA=D=900, C=400, AB=4cm, AD=3cm. Tính diện tích tứ giác.

*HD: S*  17*cm*2 *. Vẽ BH  CD. Tính DH, BH, CH.*

**Bài 4.** Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết

*AC*  4*cm*,*BD*  5*cm* , góc AOB =500. Tính diện tích tứ giác ABCD.

*HD: S*  8*cm*2 *. Vẽ AH  BD, CK  BD. Chú ý: AH*  *OA*.sin 500,*CK*  *OC*.sin 500 *.*

**Bài 5.** Chứng minh rằng:a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

*HD: a) Gọi  là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC. Vẽ đường cao CH.*

*CH*  *AC*.sin*a*

BÀI TẬP ÔN TẬP

**Bài 1.** Cho tam giác ABC có AB = 21*m*, AC = 28*m*, BC = 35*m*.a) Chứng minh tam giác ABC vuông. b) Tính sin *B*,sin*C* .

*HD:*

*a, Dùng Pytago b, *

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết HB = 112, HC = 63.a) Tính độ dài AH. b) Tính độ dài AD.

*HD: a) AH =* 84 *b) AD*  60 2 *.*

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH=5, CH=6.a) Tính AB, AC, BC, BH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

*HD: a) AB*  5 61 *, AC* 

6

*, BH*  25

6



61

*b) S*  305 *.*

12

**Bài 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 16, BH = 25.a) Tính AB, AC, BC, CH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

*HD:*

*a, Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông AHB để tính AB.*

*Dùng công thức: AB2=BH.BC để tính BC và suy ra HC.*

*AH.BC=AC.AB để tính AC. b, .*

**Bài 5.** Cho hình thang ABCD có góc A=D=900 và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.b) Cho AB = 9, CD = 16. Tính diện tích hình thang ABCD.c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

*HD: a) Vẽ AE // BD  AB = ED và AE  AC. b) S = 150 c) OA*  7,2; *OB*  5,4; *OC*  12,8; *OD*  9,6 *.*

**Bài 6.** Tính diện tích hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = 10, CD = 27, AC = 12, BD = 35.

*HD: S = 210. Vẽ BE // AC (E  CD)  DE*2  *BD*2  *BE*2 *.*

**Bài 7.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

*HD: a) Tính được AB = 24cm, AC = 45cm, BC = 51cm ABC vuông tại*

*A.*

*b) Gọi O là giao điểm ba đường phân giác.*

*SABC*  *SOBC*  *SOCA*  *SOAB .*

*Với ; ; ; * *ta được r=9cm.*

**Bài 8.** Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết góc A=480, AH=13cm.

Tinh chu vi ABC

*HD: BC*  11,6*cm*; *AB*  *AC*  14,2*cm.*

b) Chứng minh *BDE*

*DB DC*

đồng dạng ** CDB.c) Tính tổng góc (AEB+BCD).

sao cho AD=DE=EC.a) Chứng minh *DE*  *DB* .

**Bài 9.** Cho ** ABC vuông tại A, AB=*a*, AC=3*a*. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E

*HD: a) DB*2  2*a*2  *DE*.*DC c) Góc(*AEB+BCD)=ADB=450*.*

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

sin *B*  cos *B*

sin *B*  cos *B* .

**Bài 10.** Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường

chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5*a*, AC = 12*a*.a) Tính

*HD: a)* 17

7

*b) TH1: ABCD là hình thang cân, kẻ CH và DM cùng vuông góc với AB,*

*- Tính CH rồi suy ra HB, mà AM=HB nên DC=HM. => SABCD TH2: Nếu ABCD là hình bình hành thì SABCD=2SABC=AC.CB*





b) Tính

minh: *DE*  *EC* .

d) Chứng

c) Chứng minh

**Bài 11.**Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = 2HA. Gọi I là

hình chiếu của D trên HE.a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm.

*HD: a) AB*  5*cm , AC*  20 *cm , HC*  16 *cm b)* =3/2

3 3

*d)góc =900.*

**Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Đặt BC = *a*, CA = *b*, AB = *c*, AH = *h*. Chứng minh rằng tam giác có các cạnh *a*  *h*;*b*  *c*;*h* là một tam giác vuông.

*HD: Chứng minh* (*b*  *c*)2  *h*2  (*a*  *h*)2 *.*

**Bài 13.** Cho tam giác nhọn ABC, diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng:a) *SAEF*  *SBFD*  *SCDE*  cos2 *A*  cos2 *B*  cos2 *C* . b)

*SDEF*  sin2 *A*  cos2 *B*  cos2 *C* .

*HD: a) Chứng minh*

*SAEF*

 cos2 *A*

*b) S*  *S* *S*  *S*  *S* 

*SABC*

4 cos *B*

*DEF ABC AEF BFD CDE*

**Bài 14.** Cho ** ABC vuông tại A có sin*C* 1 . Tính các tỉ số lượng giác của góc

B và C.

*HD:*

cos *B*  1 *;* sin *B*  3 *;* sin *C*  1 *;* cos*C*  3 *.*

2 2 2 2



**Bài 15.** Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh:a) ANL

∽ABC b) *AN*.*BL*.*CM*  *AB*.*BC*.*CA*.cos *A*.cos*B*.cos*C*

*HD:*

*a, Xét ALC và ANB có * *nên ALC ANB (g.g) nên*

 *.*

*Xét ANL và ABC có ; * *nên ANL ABC (c.g.c) b, AN=AB.cosA; BL=BC.cosB; CM=AC.cosC.*



*HD: a)*

*; AH*  1*cm; AM*  2*cm; HM*  3 *cm ; HC*  2  3 (*cm*)

4



**Bài 16.** Cho tam giác ABC vuông tại A có , BC = 4cm.a) Kẻ đường cao

AH, đường trung tuyến AM. Tính , AH, AM, HM, HC.b) Chứng minh



rằng: cos150  6  2 .

*b)* cos150  cos*C*  *CH .*

*AC*



**Bài 17.** Cho tam giác ABC cân tại A, Có

, BC = 1cm. Kẻ phân giác CD.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC.a) Tính AD, DC.

b) Kẻ CK  BD. Giải tam giác BKC.c) Chứng minh rằng cos360  1 5 .

4

*HD:*

*a, BCD cân tại C, CDA cân tại A ( Hai góc ở đáy bằng nhau)*

*Nên DC=DA=BC=1cm*

*b, BKC có: *

 *nên CK=BC.sinB=1.sin720 Nên BK=BC.cosB=1.cos720*

*c, cos360=cosA= ; đặt AB=AC=2x, suy ra DB=AB-AD=2x-1, theo tính chất phân giác ta có:*

 *suy ra . Tìm được x= * *( vì x>0) hay AH= . Thay AD,AH vào cos360=cosA= => đpcm.*



.

e) Chứng minh rằng:

điểm E sao cho BE = 1. Vẽ ED // AB (D thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt BC tại F. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC.a) Chứng minh rằng tam giác ABE đều. Tính AH. b) Chứng minhgóc

=450.c) Tính các tỉ số lượng giác của góc AED và góc AEF. d)

Chứng minh *AED*  *AEF* . Từ đó suy ra AD = AF.

. Trên cạnh BC lấy

,

**Bài 18.** Cho tam giác ABC có AB = 1,

*HD:*

*a, BEA có AB=BE=1cm và * *nên BEA đều.*

*AH=AB.cosB=1.cos600= .*

*b, *

*Vì * *mà * *nên .*

*c, Ta có: , từ đó tính sin600, cos600…*

*d, AED và AEF có: AE chung, ; * *nên*

*AED = AEF ( g.c.g) và AD=AF ( hai cạnh tương ứng). e, Ta có:*

*.*



.c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền *ma*  5 , đường cao AH = 4.d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền *ma*  5 , một góc nhọn bằng

470 .



b)

**Bài 19.** Giải tam giác ABC, biết:a)

*HD:*

*a, ; AB=BC.cosB=10.cos750=2,59cm; AC=9,66cm*

*b, ; Kẻ AH vuông góc BC thì BH=HC.*

*Ta có: BH=AB.cosB=6.cos300= * *cm nên BC= * *cm.*

*c, BC==2ma=10 cm ( tính chất trung tuyến tam giác vuông). AM=BM=5cm mà AH=4cm nên HM=3cm ( dùng Pytago) hay BH=2cm. Mà BH2+AH2=AB2. Từ đó tính AB và AC ( Dùng Pytago).*

*d, * *nên ; BC=2ma=10 cm ( tính chất trung tuyến tam giác vuông)*

*AB=BC.cosB=10.cos470=6,8cm; AC= 7,33cm.*

**Bài 20.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 3cm, BC = 6cm. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.a) Giải tam giác vuông ABC. b) Tính độ dài AH và chứng minh: EF = AH.

c) Tính: EA.EB + AF.FC.

*HD: a) AC*  3 3 (*cm*) *, B=600, C=300b) AH*  3 3 (*cm*)

2



*c)AE.EB = EH2; AF.FC = HF2; nên*

*AE.EB+AF.FC=EH2+HF2=EF2=AH2=*

27 *.*

4